TEMA 7: FORMAS LINEALES Y BILINEALES

Definición (Forma lineal)

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita $= n$.

Llamamos formas lineales sobre V a los elementos de $\mathrm{Hom}_K(V, K) \ni \omega$, $\omega : V \longrightarrow K$
$$\mathrm{Hom}_K(V,K) = V^* \text{ Dual de } V$$

V^* es un k-espacio vectorial, $\dim_K V^* = n \cdot k = n \implies V^* \simeq V$ (imprescindible que V sea de dimensión finita)

$B, \{1_k\}$: $\underset{\{a_1, \dots, a_n\},\ a_i \cdot 1_k = \omega(v_i)}{\mathrm{Mat}_{B,\{1_k\}}(\omega)} \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$, $a_i \cdot 1_k = a_i$

$$\omega(v) = \omega(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = \sum x_i \omega(v_i) = \underline{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n}$$

De esto deducimos que $v \in \mathrm{Ker}(\omega) \iff a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$

Ej: $\omega : K[x] \longrightarrow K$ (Dimensión infinita)
$\quad f \longmapsto f(a),\ a \in K$

$$\left.\begin{aligned} \omega(f+g) &= (f+g)(a) = \omega(f) + \omega(g) \\ \omega(\lambda f) &= (\lambda f)(a) = \lambda(f(a)) = \lambda \omega(f) \end{aligned}\right\} \implies \omega \text{ es una forma lineal}$$

Ej: $\omega : \mathrm{Mat}_n(K) \longrightarrow K$
$\quad \omega(A) \longmapsto tr(A)$ es trivialmente una forma lineal

Ej: $\omega : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad f \longmapsto \int_0^1 f(t)dt$ es una forma lineal

Definición (Base dual)

Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V

$$B^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\},\ v_i \in V^*,\quad v_i^*(v_j) \overset{def}{=} \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Veamos $v_1^*, \dots, v_n^*$ son l.i.

$$a_1 v_1^* + \dots + a_n v_n^* = 0 \implies 0 = (a_1 v_1^* + \dots + a_n v_n^*)(v_j),\ \forall j$$
$$= a_j v_j^*(v_j) = a_j \cdot 1 \implies a_i = 0,\ \forall i$$

$\overset{\dim n}{\implies}$ B^* es base de V^*

Ej: $B = \{\underbrace{e_1 - e_2}_{v_1}, \underbrace{e_1 + 3e_2}_{v_2}\}$ base de V

$1 = v_1^*(e_1 - e_2) = v_1^*(e_1) - v_1^*(e_2)$

$0 = v_1^*(e_1 + 3e_2) = v_1^*(e_1) + 3 v_1^*(e_2)$

$\Rightarrow 4 v_1^*(e_2) = -1 \Rightarrow v_1^*(e_2) = -1/4 \Rightarrow v_1^*(e_1) = 3/4$

$\Rightarrow M_{B_{c},\{1_K\}}(v_1^*) = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 \end{pmatrix}$

$0 = v_2^*(e_1 - e_2) = v_2^*(e_1) - v_2^*(e_2)$

$1 = v_2^*(e_1 + 3e_2) = v_2^*(e_1) + 3 v_2^*(e_2)$

$\Rightarrow v_2^*(e_2) = 1/4 \Rightarrow v_2^*(e_1) = 1/4$

$\Rightarrow M_{B_{c},\{1_K\}}(v_2^*) = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

Sea $B' = \{\underbrace{e_1 - e_2}_{v_1}, \underbrace{e_1}_{v_2}\}$ base de V

$$\left.\begin{array}{l} 1 = v_1^*(e_1 - e_2) = v_1^*(e_1) - v_1^*(e_2) \\ 0 = v_1^*(e_1) \end{array}\right\} \Rightarrow v_1^*(e_2) = -1$$

OBS

No existe un isomorfismo canónico entre V y su dual V^* (dependen de la base)

Proposición

$$\text{Sea } \left.\begin{array}{l} \varnothing : V \to W \\ \omega : W \to K \end{array}\right\} \Rightarrow \omega \circ \varnothing : V \to K \text{ es lineal}$$

$\varnothing^* : W^* \to V^*,\ \varnothing^*(\omega) = \omega \circ \varnothing$

i) $\varnothing^*$ es lineal

ii) $(id_V)^* = id_{V^*}$

iii) $(\varnothing_2 \circ \varnothing_1)^* = \varnothing_1^* \circ \varnothing_2^*$

Dem.

i) $\emptyset^*(\omega_1+\omega_2) = (\omega_1+\omega_2)\circ\emptyset = \omega_1\circ\emptyset + \omega_2\circ\emptyset = \emptyset^*(\omega_1) + \emptyset^*(\omega_2)$

$\emptyset^*(\lambda\omega) = (\lambda\omega)\circ\emptyset = \lambda(\omega\circ\emptyset) = \lambda\,\emptyset^*(\omega)$

Proposición

$A = M_{B_V,B_W}(\emptyset) \Longrightarrow M_{B^*_W,B^*_V}(\emptyset^*) = A^t$

Dem.

$A = (a_{ij})$ $\qquad$ $M_{B^*_W,B^*_V}(\emptyset^*) = (c_{ij})$

$\emptyset(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, w_i$ $\qquad$ $\emptyset^*(w_j^*) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, v_i^*$

$w_j^*\circ\emptyset = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, v_i^*$

Se anulan todos menos en $i=k$

$$\left.\begin{array}{l} w_j^*\circ(\emptyset(v_k)) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, v_i^*(v_k) = c_{kj} \\ \qquad || \\ w_j^*\circ\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, w_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, w_j^*(w_i) = a_{jk} \end{array}\right\} \Longrightarrow a_{jk} = c_{kj} \Longrightarrow \underline{C = A^t}$$

Se anulan todos menos en $i=j$

Teorema

Si V es de dimensión finita, entonces la aplicación $\eta_V : V \longrightarrow V^{**}$ $(= (V^*)^*)$ tal que $[\eta_V(v)](\omega) = \omega(v)$, $\forall v\in V$, $\omega\in V^*$ es un isomorfismo de k-espacios vectoriales.

Dem.

i) ¿ $\eta_V(v) \in V^{**} = \mathrm{Hom}(V^*, K)$, $\forall v\in V$?

$[\eta_V(v)](\omega_1+\omega_2) = (\omega_1+\omega_2)(v) = \omega_1(v) + \omega_2(v) = [\eta_V(v)](\omega_1) + [\eta_V(v)](\omega_2)$

$[\eta_V(v)](\lambda\omega) = (\lambda\omega)(v) = \lambda\cdot\omega(v) = \lambda\cdot[\eta_V(v)](\omega)$

ii) ¿ $[\eta_V(v_1+v_2)](\omega) = [\eta_V(v_1) + \eta_V(v_2)](\omega)$?

$[\eta_V(v_1+v_2)](\omega) = \omega(v_1+v_2) = \omega(v_1) + \omega(v_2) = [\eta_V(v_1)](\omega) + [\eta_V(v_2)](\omega)$

$[\eta_v(\lambda v)](\omega) = \omega(\lambda v) = \lambda \cdot \omega(v) = \lambda \cdot [\eta_v(v)](\omega)$

iii) ¿ η_v biyectiva ?

Sabemos que $\dim V = \dim V^{**} \Longrightarrow$ Basta con ver que es inyectiva

Supongamos que η_v no fuera inyectiva $\Longrightarrow Ker(\eta_v) \neq \{0\}$

Sea $0 \neq v \in Ker(\eta_v)$ $\left([\eta_v(v)](\omega) = 0, \ \forall \omega \in V^* \right)$

$B = \{\underset{\substack{\shortparallel \\ v}}{v_1}, v_2, \dots, v_n\}$

$B^* = \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*\}$ $\quad [\eta_v(v)](v_1^*) = v_1^*(v) = v_1^*(v_1) = 1 \neq 0$ ¡! ABSURDO

$\Longrightarrow Ker(\eta_v) = \{0\} \Longrightarrow \eta_v$ es inyectiva $\Longrightarrow$ $\underline{\eta_v \text{ es biyectiva}}$

Definición (Formas ortogonales a vectores y subespacios)

i) $\omega \in V^*$, $v \in V$. Si $\omega(v) = 0$ se dice que ω es ortogonal a v. No es simétrica

ii) $W < V$, $W^\perp = \{\omega \in V^*, \ \omega(w) = 0, \ \forall w \in W\}$

Proposición

i) $W < V \Longrightarrow W^\perp < V^*$

ii) $\{0\}^\perp = V^*$, $V^\perp = \{0_{V^*}\}$

iii) $W_1 \subseteq W_2 \Longrightarrow W_2^\perp \subseteq W_1^\perp$

iv) $n = \dim V$, $m = \dim W \Longrightarrow \dim W^\perp = n - m \equiv$ Codimensión de W

v) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$

vi) $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$

vii) $W^{\perp\perp} = \eta_v(W)$, $\eta : V \to V^{**}$ isomorfismo canónico

Dem.

i) $w_1, w_2 \in W^\perp \Rightarrow (w_1+w_2)(w) = w_1(w) + w_2(w) = 0+0 = 0 \Rightarrow w_1+w_2 \in W^\perp$

$\omega \in W^\perp,\ \lambda \in K \Rightarrow (\lambda\omega)(w) = \lambda\cdot \omega(w) = \lambda\cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda\omega \in W^\perp$

ii) Trivial

iii) Si una forma se anula sobre todos los vectores de W_2 se tiene que anular sobre todos los vectores de W_1 $\Rightarrow W_2^\perp \subseteq W_1^\perp$

iv) $\{w_1,\dots,w_m\}$ base de W, $B=\{w_1,\dots,w_m,w_{m+1},\dots,w_n\}$ base de V

Veamos $\{w_{m+1}^*,\dots,w_n^*\}$ es base de W^*

Sabemos que son l.i. $\quad \underset{a_1}{\omega(w_1)} = \dots = \underset{a_n}{\omega(w_n)} = 0$

Sea $\omega \in W^\perp$: $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i^* \Rightarrow \omega = a_{m+1} w_{m+1}^* + \dots + a_n w_{m+1}^* \Rightarrow$ Son s.g.

$\Rightarrow$ Forman base $\Rightarrow \dim W^\perp = n-m$

vii) Veamos $\eta_V(W) \subseteq W^{\perp\perp} = (W^\perp)^\perp$

$\eta_V(w) \in V^{**}$

$W^\perp \subseteq V^*$

$[\eta_V(w)](\omega) = \omega(w) = 0,\ \forall \omega \in W^\perp \Rightarrow \eta_V(W) \subseteq W^{\perp\perp}$

Aparte, $\dim W = \dim \eta_V(W)$, $\dim (W^\perp)^\perp = \dim V^* - \dim W^\perp$

$= \dim V^* - (\dim V - \dim W) = \dim W$

$\Rightarrow \underline{\eta_V(W) = W^{\perp\perp}}$

vi) $(W_1 + W_2)^\perp \overset{⊛}{\subseteq} W_1^\perp \cap W_2^\perp$

$W_1^\perp + W_2^\perp \subseteq (W_1 \cap W_2)^\perp \Rightarrow (W_1\cap W_2)^{\perp\perp} \subseteq (W_1^\perp + W_2^\perp)^\perp$

$\Rightarrow \eta_V(W_1\cap W_2) \subseteq (W_1^\perp + W_2^\perp)^\perp \overset{⊛}{\subseteq} W_1^{\perp\perp} \cap W_2^{\perp\perp} = \eta_V(W_1) \cap \eta_V(W_2)$

$=$

$\subseteq \eta_V(W_1 \cap W_2)$

$\eta_V(W_1) = \eta_V(W_2)$

$\Rightarrow W_1 = W_2$

η_V isomorfismo

$$\Longrightarrow (W_1 \cap W_2)^{\perp\perp} = (W_1^{\perp} + W_2^{\perp})^{\perp} \Longrightarrow (W_1 \cap W_2)^{\perp\perp\perp} = (W_1^{\perp} + W_2^{\perp})^{\perp\perp}$$

$$\Longrightarrow \eta_{V^*}(W_1 \cap W_2)^{\perp} = \eta_{V^*}(W_1^{\perp} + W_2^{\perp}) \underset{\eta_{V^*} \text{ isomorfismo}}{\Longrightarrow} (W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$$

v) $(W_1 + W_2)^{\perp} \leq W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp} \Longrightarrow (W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp})^{\perp} \leq \eta_V(W_1 + W_2)$

$$\overset{\text{vi)}}{\|} \qquad W_1^{\perp\perp} + W_2^{\perp\perp} \overset{\text{vii)}}{=} \eta_V(W_1) + \eta_V(W_2) = \eta_V(W_1 + W_2)$$

$$\Longrightarrow \eta_V(W_1 + W_2)^{\perp} = \eta_V(W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}) \underset{\eta_V \text{ isomorfismo}}{\Longrightarrow} (W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$$

La hice yo, no sé si es correcta

Teorema (Principio de Dualidad)

La correspondencia
$$\begin{aligned} \mathrm{Sub}(V) &\longrightarrow \mathrm{Sub}(V^*) \\ W &\longmapsto W^{\perp} \end{aligned}$$
es un antiisomorfismo de retículos completos.

revierte el orden

Proposición

$V \xrightarrow{\varnothing} W$

$W^* \xrightarrow{\varnothing^*} V^*$

Veamos $\begin{cases} \operatorname{Ker} \varnothing^* = (\operatorname{Im} \varnothing)^{\perp} \\ \operatorname{Im} \varnothing^* = (\operatorname{Ker} \varnothing)^{\perp} \end{cases}$

$\operatorname{Ker} \varnothing^* < W^*$

$\operatorname{Im} \varnothing < W$

$\Downarrow$

$(\operatorname{Im} \varnothing)^{\perp} < W^*$

Sea $\omega \in W^*$: $\omega \in \operatorname{Ker} \varnothing^* \Longleftrightarrow \varnothing^*(\omega) = 0 \Longleftrightarrow \omega \circ \varnothing = 0$

$$\omega \in (\operatorname{Im} \varnothing)^{\perp} \Longleftrightarrow \omega(\varnothing(v)) = 0, \ \forall v \in V$$

$$\Longrightarrow \underline{\operatorname{Ker} \varnothing^* = (\operatorname{Im} \varnothing)^{\perp}}$$

Sea $\omega \in V^*$: $\omega \in \operatorname{Im} \varnothing^* \Longleftrightarrow$

El otro lo hacemos nosotros...

$$\omega \in (\operatorname{Ker} \varnothing)^{\perp} \Longleftrightarrow \omega(v) = 0, \ \forall v \in \operatorname{Ker}(\varnothing)$$

<u>OBS</u> ($rg\, A = rg\, A^t$)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sea } A = M_{B_V, B_W}(\varnothing) \\ A^t = M_{B_W^*, B_V^*}(\varnothing^*) \end{array}\right\} \text{Veamos } rg(A) = rg(A^t)$$

$$rg(A^t) = rg(\varnothing^*) = \dim W^* - \dim Ker\, \varnothing^* = \dim W - \dim(Im\, \varnothing)^{\perp} = \dim W - (\dim W - \dim Im\, \varnothing)$$

$$= \dim Im\, \varnothing = rg(\varnothing) = rg(A)$$

Ortogonalidad e idea de perpendicularidad

Sea $H < V$, $\dim H = n-1$ (hiper plano), B base de V

$H: a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$

$$\underset{\underset{x_1v_1 + \ldots + x_nv_n}{\shortparallel}}{v} \in H \iff a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$$

el ortogonal del hiperplano es una recta

$$\underset{\dim n}{H^{\perp} < V^*}, \ \dim H^{\perp} = n-(n-1) = 1 \implies H^{\perp} = L(\omega),\ \omega = a_1v_1^* + \ldots + a_nv_n^* \ (B^*)$$

<u>Formas bilineales</u>

$$\begin{aligned} \langle\, ,\, \rangle : V \times V^* &\longrightarrow K \\ (v, \omega) &\longmapsto \omega(v) = \langle v, \omega \rangle \\ &\qquad \shortparallel \\ &\quad\ \eta_v(v)(\omega) \end{aligned}$$

$\langle\, ,\, \rangle$ es bilineal

$\langle v+v', \omega \rangle = \langle v, \omega \rangle + \langle v', \omega \rangle$	$\langle v, \omega+\omega' \rangle = \langle v, \omega \rangle + \langle v, \omega' \rangle$
$\langle \lambda v, \omega \rangle = \lambda \langle v, \omega \rangle$	$\langle v, \lambda\omega \rangle = \lambda \langle v, \omega \rangle$
Forma lineal sobre V	Forma lineal sobre V^*

Definición (Forma bilineal)

$f: V \times V \longrightarrow K$ es k-bilineal si:

$f(v+v', w) = f(v,w) + f(v',w)$, $f(v, w+w') = f(v,w) + f(v,w')$

$f(\lambda v, w) = \lambda \cdot f(v,w)$, $f(v, \lambda w) = \lambda \cdot f(v,w)$

Ej: $\omega_1, \omega_2 \in V^* \Longrightarrow f(v,w) = \omega_1(v)\cdot\omega_2(w) = (a_1x_1 + \dots + a_nx_n)(b_1y_1 + \dots + b_ny_n)$

$v = (x_1, \dots, x_n)_B$, $\omega_1(v) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$

$w = (y_1, \dots, y_n)_B$, $\omega_2(w) = b_1y_1 + \dots + b_ny_n$

f es bilineal

Ej: $V = Mat_n(K) \Longrightarrow f(A,C) = tr(AC)$ es bilineal

$f(A+A', C) = tr((A+A')C) = tr(AC + A'C) = tr(AC) + tr(A'C) = f(A,C) + f(A',C)$

Ej: $V = Mat_n(K) \Longrightarrow g(A,C) = tr(A\cdot C^t)$ es bilineal

Ej: $h(A,C) = tr(A)\cdot tr(C)$ es bilineal

B base de V, $f \in Bil(V) \equiv$ Conjunto de las formas bilineales en V

$$\begin{cases} v = x_1v_1 + \dots + x_nv_n \\ w = y_1v_1 + \dots + y_nv_n \end{cases}$$

$$f(v,w) = \sum_{i,j} x_iy_j \underbrace{f(v_i, v_j)}_{a_{ij} \in K} = (x_1 \cdots x_n)\underbrace{\overbrace{(a_{ij})}^{A = M_B(f)}}_{\in\, Mat_n(K)} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ej: $V = Mat_2(K)$, $n = 4$, $f(A,C) = tr(A\cdot C)$

$\mathcal{E} = \left\{ E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$a_{11} = tr(E_{11}\cdot E_{11}) = tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$

$a_{12} = tr(E_{11}\cdot E_{12}) = tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$a_{21} = tr(E_{12}\cdot E_{11}) = tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$a_{13} = tr(E_{11}\cdot E_{21}) = tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$a_{14} = tr(E_{11}\cdot E_{22}) = tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$$M_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Ej: $\dim V = 2$

$$f(v,w) = (x_1 \ x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \sum x_i y_j a_{ij}$$

$$= x_1 y_1 a_{11} + x_1 y_2 a_{12} + x_2 y_1 a_{21} + x_2 y_2 a_{22}$$

B':

$$f(v,w) = (x_1' \ x_2')\, A' \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$$

Matrices congruentes

$P = M(B', B) \in GL_n(K) \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ Por filas: $(x_1 \cdots x_n) = (x_1' \cdots x_n') \cdot P^t$

$$(x_1' \cdots x_n')\, A' \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = f(v,w) = (x_1 \cdots x_n)\, A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1' \cdots x_n')\, P^t A P \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

$\implies A' = P^t A P$

OBS

Congruentes $\implies$ Equivalentes $\implies$ Mismo rango

f bilineal $\implies rg(f) = rg(M_B(f))$, B base cualquiera

Definición (Forma bilineal no degenerada)

Decimos que f es no degenerada si $rg(f) = n = \dim_K V$

f no degenerada $\iff |A| \neq 0$, $A = M_B(f)$

OBS

Una forma bilineal no es una aplicación lineal.

$$f((v,w) + (v',w')) = f((v+v', w+w')) = 4 \text{ sumandos}$$
$$\neq$$
$$f(v,w) + f(v',w')$$

Operaciones con formas bilineales

$$f,g \in Bil(V) \Longrightarrow \begin{cases} (f+g)(v,w) = f(v,w) + g(v,w) \\ (\lambda f)(v,w) = \lambda \cdot f(v,w) \end{cases}$$

$Bil(V)$ es un K-espacio vectorial

$$Bil(V) \simeq Mat_n(K) \Longrightarrow \dim Bil(V) = n^2 \quad , \quad \chi(K) \neq 2$$
$$f \longmapsto M_B(f)$$

Definición (Formas bilineales simétricas y antisimétricas)

f es simétrica si $f(v,w) = f(w,v)$, $\forall v,w \in V$

f es antisimétrica si $f(v,w) = -f(w,v)$, $\chi(K) \neq 2$

$$a_{ij} = f(v_i,v_j) = f(v_j,v_i) = a_{ji} \Longrightarrow f \text{ es simétrica} \Longleftrightarrow A = A^t$$

$$a_{ij} = f(v_i,v_j) = -f(v_j,v_i) = -a_{ji} \Longrightarrow f \text{ es antisimétrica} \Longleftrightarrow A = -A^t$$

$$A = \underbrace{\frac{A-A^t}{2}}_{\text{antisimétrica}} + \underbrace{\frac{A+A^t}{2}}_{\text{simétrica}}$$ $\Longrightarrow$ Toda forma bilineal descompone de forma única como suma de una forma simétrica y una antisimétrica.

$$f(v,w) = f_s(v,w) + f_a(v,w)$$

$$\underset{\underset{Bil_s(V)}{\cap}}{f_s}(v,w) = \frac{f(v,w)+f(w,v)}{2} \quad , \quad \underset{\underset{Bil_a(V)}{\cap}}{f_a}(v,w) = \frac{f(v,w)-f(w,v)}{2}$$

OBS

$$f \in Bil_a(V) \Longrightarrow \begin{cases} f(v,v) = 0 \Longrightarrow v \text{ es isótropo respecto a } f \\ f(v,w) = -f(w,v) \end{cases}$$

$$f \in Bil_s(V) \Longrightarrow \begin{cases} f(v,w) = f(w,v) \\ f(v,v) \text{ no tenemos suficiente información} \end{cases}$$

$$\dim Bil_s(V) = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\dim Bil_a(V) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Pensarlo como las posiciones a "rellenar" en una matriz.

$$Bil(V) = Bil_s(V) \oplus Bil_a(V)$$

Proposición

Son equivalentes:

i) f es antisimétrica

ii) Todos los vectores son isótropos

Dem.

$i \Rightarrow ii)$ Ya visto

$ii \Rightarrow i)$ $0 = f(v+w, v+w) = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(v,v)}} + f(w,v) + f(v,w) + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(w,w)}}$

$\Longrightarrow f(v,w) = -f(w,v) \Longrightarrow f$ antisimétrica

Corolario

Si f simétrica, $f \neq 0 \Longrightarrow \exists\, v$ no isótropo

Definición (f_{iz} y f_d + comprobación de linealidad)

$f: V \times V \longrightarrow K$ bilineal

$f_{iz}: V \longrightarrow V^*$

$f_{iz}(v)(w) \overset{def}{=} f(v,w)$

$f_d: V \longrightarrow V^*$

$f_d(v)(w) \overset{def}{=} f(w,v)$

Veamos que $f_{iz}, f_d \in \mathrm{Hom}_K(\underset{\dim n}{V}, \underset{\dim n}{V^*})$

$$\left.\begin{array}{l} f_{iz}(v+v')(w) = f(v+v', w) = f(v,w) + f(v',w) = f_{iz}(v)(w) + f_{iz}(v')(w) \\ f_{iz}(\lambda v)(w) = f(\lambda v, w) = \lambda f(v,w) = \lambda f_{iz}(v)(w) \end{array}\right\} \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_d(v+v')(w) = f(w, v+v') = f(w,v) + f(w,v') = f_d(v)(w) + f_d(v')(w) \\ f_d(\lambda v)(w) = f(w, \lambda v) = \lambda f(w,v) = \lambda f_d(v)(w) \end{array}\right\} \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$$

Comprobación personal

Proposición (Matrices de f_{iz} y f_d)

B base de V, B^* base de V^*, $A = M_B(f)$, $rg(f) = rg(A)$

$$A = (a_{ij}),\ a_{ij} = f(v_i, v_j)$$

$$M_{B,B^*}(f_{iz}) = (c_{ij})$$

$$f_{iz}(v_i) = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} v_j^*$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{iz}(v_i)(v_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ji} v_j^*\right)(v_k) = c_{ki} \\ \qquad \| \\ f(v_i, v_k) = a_{ik} \end{array}\right\} \Longrightarrow \underline{M_{B,B^*}(f_{iz}) = (c_{ji}) = A^t}$$

$$M_{B,B^*}(f_d) = (d_{ij})$$

$$\left.\begin{array}{l} f_d(v_i)(v_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} d_{jk} v_j^*\right)(v_i) = d_{ik} \\ \qquad \| \\ f(v_i, v_k) = a_{ik} \end{array}\right\} \Longrightarrow \underline{M_{B,B^*}(f_d) = (d_{ij}) = A}$$

$$rg(f) = \left\{\begin{array}{l} rg(f_{iz}) = n - \dim Ker(f_{iz}) \\ rg(f_d) = n - \dim Ker(f_d) \end{array}\right\} \Longrightarrow \dim Ker(f_{iz}) = \dim Ker(f_d) = n - rg(f)$$

OBS

f no degenerada $\Longleftrightarrow$ f_{iz} isomorfismo $\Longleftrightarrow$ f_d isomorfismo ($\dim Ker = 0$)

Ej: $M_{Bc}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1 y_2)$

$$Ker(f_{iz}) = Ker \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : x_1 = 0$$

$$Ker(f_d) = Ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : x_2 = 0$$

Forma cuadrática asociada

17/03/2021

$f \in Bil(V) \Longrightarrow q: V \longrightarrow K \equiv$ Forma cuadrática asociada

$$q(v) = f(v,v)$$

$f \in Bil_a(V) \Longrightarrow q(v) = 0$

$f \in Bil_s(V) \Longrightarrow q(v+w) = f(v+w, v+w) = q(v) + q(w) + 2f(v,w)$

$\Longrightarrow f(v,w) = \frac{1}{2}\left(q(v+w) - q(v) - q(w)\right)$ Hay una única simétrica de la que procede q

$$q(v) = f(v,v) = (x_1 \cdots x_n)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$$

$q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$

$f \in Bil_s(V) \Longrightarrow M_B(q) = M_B(f)$ Porque q solo procede de esta f únicamente. Si no fuera simétrica habría ambigüedad.

Definición (Vectores ortogonales respecto de una forma antisimétrica)

$W < V$, $f \in Bil_a(V)$, $v, w \in V$. Se dice:

i) v y w son ortogonales respecto de f si $f(v,w) = 0$

ii) $W^\perp = \{ v \in V : f(v,w) = 0, \forall w \in W \}$

OBS

$W^\perp < V$

Ej: $M_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

antisimétrica $\Longrightarrow$ f antisimétrica

$\underset{(x_1,x_2)}{f(v,v)} = 0 \iff v \in L(v)^\perp$

$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1 y_2 - x_2 y_1$

$x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0, \forall v \in V \Longrightarrow$ Todos los vectores son isótropos.

$\{0\}^{\perp} = \mathbb{R}^2$, pues $f(v,0) = f(v,0) + f(v,0) \Longrightarrow f(v,0) = 0$

$(\mathbb{R}^2)^{\perp}$

$v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\underset{\underset{f_{iz}(v)(w)}{\parallel}}{f(v,w)} = 0,\ \forall w \in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow v \in Ker(f_{iz})$

$rg(f) = 2 = rg(f_{iz}) \Longrightarrow \dim Ker(f_{iz}) = \{0\} \Longrightarrow v = 0 \Longrightarrow (\mathbb{R}^2)^{\perp} = \{0\}$

$W: x_1 - x_2 = 0$

$v \in W^{\perp} \Longleftrightarrow 0 = f(v, e_1 + e_2) = x_1 - x_2 = x_1 - x_2 \Longrightarrow W^{\perp} = W$

Teorema

Si $f \in Bil_a(V)$, entonces el rango de f es par y existe alguna base B de V tal que

$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{(s)} \oplus (0)^{(t)}$, donde $rg(f) = 2s$, $2s + t = \dim V$

Dem.

- $f = 0$: Nada que probar
- $f \neq 0$: $\exists v, w \in V,\ v \neq w,\ \overset{a}{\overset{\parallel}{f(v,w)}} \neq 0$

Veamos que v y w son l.i.

$\lambda v + \mu w = 0 \Longrightarrow f(v, \lambda v + \mu w) = \mu f(v,w) = \mu \cdot a = 0 \Longrightarrow \mu = 0$

$f(w, \lambda v + \mu w) = \lambda \cdot f(w,v) = \lambda \cdot (-a) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$

$v_1 = a^{-1} v,\ v_2 = w$

$f(v_1, v_2) = a^{-1} f(v,w) = a^{-1} \cdot a = 1$

Sea $\pi = L(v,w) = L(v_1, v_2)$

Veamos $V = \pi \oplus \pi^{\perp}$

Sea $\underset{\underset{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3w_3 + \ldots + x_nw_n}{\parallel}}{v} \in \pi^{\perp}$. $v \in \pi^{\perp} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 = f(v_1, v) = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 + \ldots = x_2 + \ldots \\ 0 = f(v_2, v) = -x_1 + x_2 \cdot 0 + \ldots = -x_1 + \ldots \end{cases}$

Las ecuaciones son independientes $\Longrightarrow \dim \pi^\perp = n-2$

$$\underset{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2}{\overset{\parallel}{v}} \in \pi \cap \pi^\perp \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, v_1) = \lambda_1 \\ 0 = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, v_2) = \lambda_2 \end{array} \right\} \Longrightarrow v = 0 \Longrightarrow \pi \cap \pi^\perp = \{0\}$$

$$B = \{v_1, v_2, \underbrace{v_3, \dots, v_n}_{\text{base de } \pi^\perp}\} \Longrightarrow M_B(f) = \underset{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{\overset{\parallel}{M_{\{v_1,v_2\}}(f|_{\pi\times\pi})}} \oplus M_{\{v_3,\dots,v_n\}}(f|_{\pi^\perp \times \pi^\perp})$$

Se termina con una inducción

Formas congruentes

$f, f' \in Bil(V)$ son congruentes si $M_B(f) = M_{B'}(f')$, B y B' bases de V

Ej: $A \in \overset{\text{Antisimétricas}}{A_2(K)} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ \text{ó} \\ A \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \Longleftrightarrow A = P^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} P,\ P \in GL_2(K)$

$$\underset{\dim V = 2}{f \in Bil_a(V)} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f = 0 \\ \text{ó} \\ f(v,w) = x_1 y_2 - x_2 y_1,\ v = (x_1, x_2)_B,\ w = (y_1, y_2)_B \end{array} \right.$$

$$A \in A_3(K) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ \text{ó} \\ A \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \Longleftrightarrow A = P^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P,\ P \in GL_3(K)$$

$$\underset{\dim V = 3}{f \in Bil_a(V)} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f = 0 \\ \\ f(v,w) = x_1 y_2 - x_2 y_1,\ v = (x_1, x_2, x_3)_B,\ w = (y_1, y_2, y_3)_B \end{array} \right.$$

OBS

$A \equiv A' \Longleftrightarrow rg(A) = rg(A')$ $(\Longleftrightarrow A \approx A')$, A, A' antisimétricas

$f \equiv f' \Longleftrightarrow rg(f) = rg(f')$, $f, f' \in Bil_a(V)$

Ej: $\underset{0}{\overset{A}{\neq}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in A_3(K) \Longrightarrow A \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \exists f: K^3 \times K^3 \longrightarrow K,\ M_{B_C}(f) = A,\ M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f(e_1, e_2) = 1$, $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$

$$L(e_1, e_2) = \pi \Longrightarrow \pi^\perp = \left\{ \begin{array}{l} 0 = f(e_1, v) = x_2 + x_3 \\ 0 = f(e_2, v) = -x_1 + x_3 \end{array} \right. \Longrightarrow \pi^\perp = L(\underset{v_3 = e_1 - e_2 + e_3}{e_1 - e_2 + e_3})$$

$$P = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix} = M(B, B_c) \Longrightarrow \begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = P^t A P$$

Clasificación por semejanza (formas antisimétricas)

Sea $A = \begin{pmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{pmatrix}$

- $a=b=c=0 \Longrightarrow A=0$
- Caso general (alguno $\neq 0$): $p_A = -x^3 + \overset{tr(A)}{0}x^2 - (a^2+b^2+c^2)x + 0$ pues el rango es par

$$= -x(x^2+a^2+b^2+c^2)$$

- $K=\mathbb{R},\ A\neq 0$: $q_A = x(x^2+a^2+b^2+c^2)$

$$\Longrightarrow A \sim C_{x(x^2+a^2+b^2+c^2)} \sim \begin{cases} \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&-a^2-b^2-c^2\\0&1&0\end{pmatrix} \\ C_x \oplus C_{a^2+b^2+c^2} = \left(\begin{array}{c|cc}0&0&0\\ \hline 0&0&-a^2-b^2-c^2\\0&1&0\end{array}\right)\end{cases}$$

Hay infinitas clases de semejanza.

Definición (Vectores ortogonales respecto de una forma simétrica)

$$f \in Bil_s(V) \Longrightarrow \begin{cases} f(v,w)=0, \text{ se dice que } v \text{ y } w \text{ son ortogonales respecto de } f \\ W < V \Longrightarrow W^{\perp} = \{v\in V : f(v,w)=0,\ \forall w\in W\} < V\end{cases}$$

Teorema

Si $f\in Bil_s(V)$, entonces $\exists B$ base de V tal que $M_B(f)$ es diagonal

Dem.

- $f=0$: Nada que probar
- $f\neq 0$: $\exists\, \overset{\overset{0}{\not\parallel}}{v_1}\in V$ no isótropo $\Longrightarrow v, w$ ó $v+w$ no es isótropo

Veamos $L(v_1)^{\perp}$ es un hiperplano:

$\{v_1, w_2, \dots, w_n\}$ base de V, $v = x_1v_1 + x_2w_2 + \dots + x_nw_n \in L(v_1)^{\perp} \Longleftrightarrow f(v,v_1)=0$

$$\Longrightarrow 0 = \underset{\underset{0}{\not\parallel}}{f(v_1,v_1)}x_1 + \dots \Longrightarrow \dim L(v_1)^{\perp} = n-1$$

Pues $v \in L(v_1)$; Pues $v \in L(v_1)^\perp$

Supongamos $v \in L(v_1) \cap L(v_1)^\perp \Rightarrow v = \lambda v_1 \Rightarrow 0 = f(\lambda v_1, v_1) = \lambda \underset{\neq 0}{f(v_1, v_1)}$

$\Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow v = 0$

$\Rightarrow V = L(v_1) \oplus L(v_1)^\perp$

Sea $B = \{v_1, \underbrace{v_2, \dots, v_n}_{\text{base de } L(v_1)^\perp}\}$ base de V : $M_B(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} f(v_1,v_1) & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M_{\{v_2,\dots,v_n\}}(f|_{L(v_1)^\perp \times L(v_1)^\perp}) & \\ 0 & & & \end{array}\right)$

↳ Todos los demás son ortogonales a v_1

$f|_{L(v_1)^\perp \times L(v_1)^\perp} \in Bil_s(V')$, $\dim V' = n-1$

Por inducción se obtiene que su matriz es diagonal.

$$\Rightarrow M_B = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & d_r & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & \vdots \\ & & & & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad r = rg(f)$$

OBS

Toda matriz simétrica es congruente a una matriz diagonal.

Teorema

Si $f \in Bil_s(V)$, V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial

$\Rightarrow \exists B$ base de V tal que $M_B(f) = I_r \oplus O_{n-r}$, $r = rg(f)$

Dem.

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad v_i' = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d_i}} v_i, & i = 1, \dots, r \\ v_i, & i > r \end{cases}, \quad \sqrt{d_i} \in \mathbb{C}$$

$\Rightarrow \underline{M_{B'}(f) = I_r \oplus O_{n-r}}$, pues $f(v_i', v_i') = f\left(\frac{1}{\sqrt{d_i}} v_i, \frac{1}{\sqrt{d_i}} v_i\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{d_i}}\right)^2 f(v_i, v_i) = 1$

OBS

Las matrices simétricas complejas son congruentes $\Leftrightarrow$ tienen el mismo rango

Caso en $\mathbb{R}$ (Ley de inercia)

$\exists B$ base de V $\mathbb{R}$-espacio vectorial tal que $M_B(f) = I_s \oplus (-I_t) \oplus O_{n-r}$, $r = rg(f) = s+t$

Además s y t son únicos.

Dem.

Sea $B' = \{v_1', \dots, v_n'\}$, $v_i' = \begin{cases} \frac{1}{e_i} v_i, & 1 \leq i \leq s,\ d_i = e_i^2,\ e_i \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{e_i} v_i, & s+1 \leq i \leq r,\ d_i = -e_i^2,\ e_i \in \mathbb{R} \\ v_i, & r < i \leq n \end{cases}$

$$f(v_i', v_i') = \begin{cases} \frac{1}{e_i^2} f(v_i, v_i) = \frac{1}{e_i^2} d_i = 1, & 1 \leq i \leq s \\ \frac{1}{e_i^2} f(v_i, v_i) = \frac{1}{e_i^2} d_i = -1, & s+1 \leq i \leq r \\ f(v_i, v_i) = 0, & r < i \leq n \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $\underline{M_{B'}(f) = I_s \oplus (-I_t) \oplus O_{n-r},\ s+t = r}$

Unicidad de s y t:

$M_B(f) = I_s \oplus (-I_t) \oplus O_{n-r}$, $r = s+t$

$M_{B'}(f) = I_{s'} \oplus (-I_{t'}) \oplus O_{n-r}$, $r = s'+t'$

$W_1 = L(v_1, \dots, v_s)$. $\dim W_1 = s$

$W_2 = L(v_{s'+1}', \dots, v_n')$. $\dim W_2 = n - s'$

Veamos $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

Sea $v = \sum_{i=1}^{s} a_i v_i = \sum_{j=s'+1}^{n} a_j' v_j'$

$$\left.\begin{array}{l} f(v,v) = \sum_{i=1}^{s} a_i^2 f(v_i, v_i) = \sum_{i=1}^{s} a_i^2 \geq 0 \\ f(v,v) = \sum_{j=s'+1}^{n} a_j'^2 f(v_j', v_j') = \sum_{j=s'+1}^{r} -a_j'^2 \leq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow a_i = 0,\ i = 1, \dots, s,\ a_j' = 0,\ j = s+1, \dots, n \\ \Longrightarrow \underline{v = 0} \end{array}$$

$\Longrightarrow n \geq \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 = s + n - s' \Longrightarrow s' \geq s$

Intercambiando papeles obtenemos $s \geq s' \Longrightarrow \underline{s = s'} \Longrightarrow \underline{t = t'}$

Definición (Signatura de f)

$\mathcal{E}(f) = (s, t)$

OBS

Dos formas simétricas son congruentes $\Longleftrightarrow$ Tienen la misma signatura

Ej: $n = 2$

Formas simétricas:
rg 2

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{E}(f) = (2,0) \Longrightarrow f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{E}(f) = (1,1) \Longrightarrow f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 - x_2y_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{E}(f) = (0,2) \end{array}\right.$$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \Downarrow$

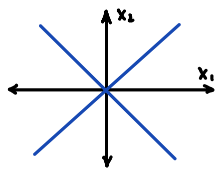
$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = -x_1y_1 - x_2y_2$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : q(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$ Definida positiva (todos valores positivos menos el 0) $\rightarrow$ Vectores isótropos: $\{0\}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} : q(x_1,x_2) = -x_1^2 - x_2^2$ Definida negativa (todos valores negativos menos el 0) $\rightarrow$ Vectores isótropos: $\{0\}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} : q(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2$ Indefinida

$\hookrightarrow$ Vectores isótropos:



$x_1 = \pm x_2$

rg 1 :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{E}(f) = (1,0) \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 \\ \mathcal{E}(f) = (0,1) \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = -x_2y_2 \end{array}\right.$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow q(x_1,x_2) = x_1^2 \Longrightarrow \mathrm{Ker}(f): x_1 = 0$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow q(x_1,x_2) = -x_1^2 \Longrightarrow \mathrm{Ker}(f): x_1 = 0$

Como f simétrica $\Longrightarrow \underset{\text{recta}}{\mathrm{Ker}(f)} = \mathrm{Ker}(f_{iz}) = \mathrm{Ker}(f_d)$

En general no tiene sentido hablar del núcleo de una forma bilineal, pero con las simétricas sí.

rg 0: $f = 0$

$\Longrightarrow$ Hay 6 formas simétricas salvo congruencia

Ej: $n = 3$

No degeneradas: $\begin{cases} \varepsilon(f) = (3,0) \\ \varepsilon(f) = (2,1) \\ \varepsilon(f) = (1,2) \\ \varepsilon(f) = (0,3) \end{cases}$ $\Longrightarrow f(v,w) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 \ , \ q(v) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$

Semidefinita positiva

rg 2: $\begin{cases} \varepsilon(f) = (2,0) \Longrightarrow q(v) = x_1^2 + x_2^2 . \quad q(0,0,x_3) = 0 \\ \varepsilon(f) = (1,1) \\ \varepsilon(f) = (0,2) \Longrightarrow q(v) = -(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$

Semidefinida negativa

Notación (Formas definidas e indefinidas)

$\varepsilon(f) = \begin{cases} (n,0) \\ (0,n) \end{cases} \Longrightarrow$ Definidas

$\varepsilon(f) = (s,t),\ s,t \neq n \Longrightarrow$ Indefinidas / No definidas

$\varepsilon(f) = \begin{cases} (r,0) \\ (0,r) \end{cases}, \ r \lneq n \Longrightarrow$ Semidefinidas

$\varepsilon(f) = (s,t),\ s+t = n \Longrightarrow$ No degenerada

Correspondencia entre formas simétricas y cuadráticas

$f \in Bil_s(V) \Longrightarrow \begin{cases} q(v) = f(v,v) \\ f(v,w) = -\frac{1}{2}\left[q(v+w) - q(v) - q(w)\right] \end{cases}$ Correspondencia biyectiva

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$f(v,w) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{12}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$$

$$q(v) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$